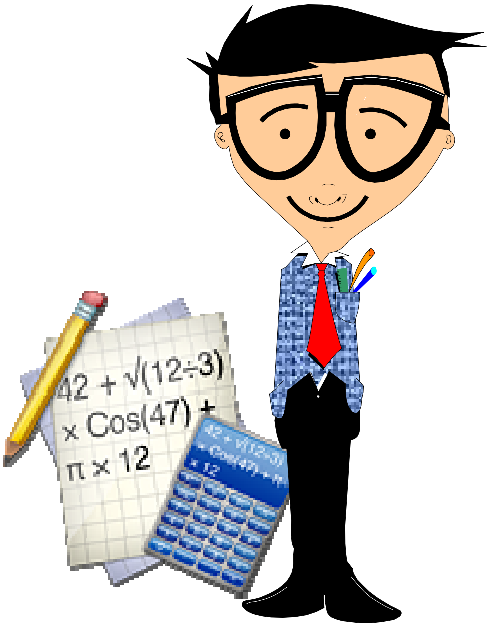


COMPENDIO DI MATEMATICA

(Analisi Matematica, Algebra, Geometria)

Autore: .... **Emiliano Vezzoli** (vezzoli@evweb.it - www.evweb.it)
Versione: .... 3.1 - Luglio 2008
Prima versione: .... 1.0 - Giugno 2002

INDICE ANALITICO

1. IL CALCOLO COMBINATORIO

1.1 Disposizioni

Disposizioni semplici $D_{n,k}=n(n-1)(n-2).....(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$ $(0\leq k \leq n)$ diff. per un elemento o per l'ordine

con ripetizione $D^r_{n,k}=n^k$ $k\in N_0$ diff. per due el. dist. che occupano lo stesso posto

1.2 Permutazioni

Permutazioni semplici $P_n=D_{n,n}=n!$, elementi ripetuti $P_n^{(\alpha,\beta,...)}=\frac{n!}{\alpha!\beta!...}$

1.3 Combinazioni

Combinazioni semplici $C_{n,k}=\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=\frac{D_{n,k}}{P_k}$ diff. Per un elemento

con ripetizione $C'_{n,k}=\binom{n+k-1}{k}=\frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+1)n}{k!}$

$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ $\binom{n}{0}=1$ $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

Stifel $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$ ricorrenza $\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$

$\binom{m+n}{k}\sum_{r=0}^{k}\binom{m}{k-r}\binom{n}{r}$ $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$

2. I LIMITI DI FUNZIONE

Per il calcolo dei limiti (x tende ad un numero finito o all'infinito), si utilizzano le formule seguenti quando sono noti i limiti finiti *l* e *m*.

Noti: lim f(x)=l e lim g(x) = m

$$\lim[f(x)\pm g(x)] = l \pm m \qquad \lim\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{l}{m}\ (m \neq 0) \qquad \lim[f(x)\cdot g(x)] = lm \qquad \lim \ln(f(x)) = \ln l\ \ (l>0) \qquad \lim e^{f(x)} = e^{l}$$

$$Per\ \log_a f(x)\ \ usare:\ \log_a f(x) = \frac{\ln f(x)}{\ln a} \qquad per\ a^{f(x)}\ usare\ \ a^{f(x)} = e^{f(x)\ln a}$$

Nei casi esclusi dalle regole precedenti o per limiti infiniti si possono applicare le seguenti *relazioni formali*.

Somma: $l \pm \infty = \pm\infty; \quad +\infty + \infty = +\infty; \quad -\infty - \infty = -\infty$

Prodotto: $l \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \quad (l \neq 0); \quad (\pm\infty)\cdot(\pm\infty) = \pm\infty$; Vale la regola dei segni.

Quoziente: $\frac{l}{0} = \infty \quad (l \neq 0); \quad \frac{\infty}{0} = \infty \qquad \frac{l}{\pm\infty} = 0; \quad \frac{0}{\pm\infty} = 0$

Esponenziale: $l > 1 \begin{cases} l^{(+\infty)} = +\infty \\ l^{(-\infty)} = 0 \end{cases}$; $0 < l < 1 \begin{cases} l^{(+\infty)} = 0 \\ l^{(-\infty)} = +\infty \end{cases}$ $\qquad m > 0 \begin{cases} (+\infty)^{m} = +\infty \\ (+\infty)^{(+\infty)} = +\infty \\ 0^{+\infty} = 0 \end{cases}$; $m < 0 \begin{cases} (+\infty)^{m} = 0 \\ (+\infty)^{(-\infty)} = 0 \\ 0^{(-\infty)} = +\infty \end{cases}$

Logaritmo:

$$\ln(0) = -\infty; \quad \ln(+\infty) = +\infty$$

$$Per\ \ \log_a f(x)\ \ usare:\ \ \log_a f(x) = \frac{\ln f(x)}{\ln a} \begin{cases} a > 1 \Rightarrow \ln a > 0 \\ 0 < a < 1 \Rightarrow \ln a < 0 \end{cases}$$

2.1 Limiti notevoli

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e; \quad 2)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x} = e^{\alpha}; \quad 3)\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \quad 4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x} = \alpha$$

$$6)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{\beta}} = +\infty; \quad 7)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{\alpha} x}{x^{\beta}} = 0; \quad 8)\ \lim_{x\to 0^{+}} x^{\beta}\cdot\ln^{\alpha} x = 0; \quad (\forall\alpha\in\Re\, e\, \forall\beta>0); \quad 8.1)\ \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x} = \ln a = \frac{1}{\log_a e}$$

$$9)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} = 1; \quad 10)\ \lim_{f(x)\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)} = 1; \quad 11)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}; \quad a\in\Re^{+}-\{1\}; \quad 12)\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{k}-1}{x} = k; \quad k\in\Re$$

$$13)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1; \quad 14)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} ax}{ax} = 1\ (a\neq 0); \quad 15)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1; \quad 16)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 1; \quad 17)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^{2} x}{x^{2}} = \frac{1}{2}$$

18) $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{sen}\frac{1}{x}=0 \quad \left(poich\grave{e}\ \left|x\,\mathrm{sen}\frac{1}{x}\right|<|x|\right);$ 19) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\,\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{x}=0 \quad \left(0\le x^2\,\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{x}\le x^2\right);$ 20) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}=\frac{\pi}{180} \quad (x\ in\ gradi)$

2.2 Forme indeterminate

2.2.2 $[\frac{0}{0}\ e\ \frac{\infty}{\infty}]$

Si applica la formula di **De L'Hopital** $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Per le funzioni razionali fratte con $\begin{cases} numeratore\ di\ grado\ n \\ denominatore\ di\ grado\ d \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n+\ldots}{bx^d+\ldots}=\begin{cases}\infty & per\ n>d \\ \frac{a}{b} & per\ n=d \\ 0 & per\ n<d\end{cases}$

2.2.3 $[0\cdot\infty]$

Si riconduce al caso $\frac{0}{0}\ o\ \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ $\quad oppure \quad f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$

2.2.4 $[0^0;\ \infty^0;\ 1^\infty]$

Si trasforma usando $\lim[g(x)\ln f(x)]=l\ \ (forma\ ind.\ 0\cdot\infty); \Rightarrow \lim f(x)^{g(x)}=\lim e^{g(x)\ln f(x)}=e^l\ \ (l\ anche\ +\infty,-\infty)$

2.2.5 $[\infty-\infty]$

Si riporta ad uno dei precedenti casi:

$$\lim\frac{g(x)}{f(x)}=l\Rightarrow f(x)-g(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}}\left(forma\ ind.\frac{0}{0}\right) se\ l=1\end{cases} \qquad oppure \qquad f(x)-g(x)=f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)$$

Se ci sono radicali si può razionalizzare: si moltiplica e si divide per lo stesso fattore, che elimina la differenza (o somma) fra radicali; ad es. se la funzione è del tipo $\sqrt{\ }\pm\sqrt{\ }$, si moltiplica e si divide per $\sqrt{\ }\mp\sqrt{\ }$

3. DERIVATE DI FUNZIONI

3.1 Riepilogo Derivate notevoli

y = c	y' = 0	y = logx = lnx	$y'=\frac{1}{x}$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = a^x$	$y' = a^x \log a$
y = senx	y' = cosx	$y = e^x$	$y' = e^x$
y = cosx	y' = -senx	y = arc senx	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
y = tgx	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2 x$	y = arc cosx	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
y = ctgx	$y'=-\frac{1}{\mathrm{sen}^2 x}=-(1+ctg^2 x)$	y = arc tgx	$y'=\frac{1}{1+x^2}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	y = arc cotgx	$y'=-\frac{1}{1+x^2}$
$y=\sqrt[n]{x}$	$y'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y=[f(x)]^{g(x)}$	$y'=[f(x)]^{g(x)}\left\{g'(x)\log f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}$
$y = \log_a x$	$y'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$		

3.2 Derivata di funzioni potenza

$Dx^n = nx^{n-1}$ D x = 1 $D|x| = \mathrm{sgn}\, x = \frac{x}{|x|}$ $D\sqrt[n]{x}=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $D\frac{1}{x}=-\frac{1}{x^2}$ $D\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

3.3 Derivate di funzioni goniometriche

D senx = cosx D cosx = -senx $Dtgx=\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2 x$ $Dctgx=-\frac{1}{\mathrm{sen}^2 x}=-(1+ctg^2 x)$

3.4 Derivata della funzione logaritmica

$D\log_a x=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$ $D\ln x=\frac{1}{x}$

3.5 Derivata della funzione esponenziale

$D a^x = a^x \ln a$ $D e^x = e^x$

3.6 Derivate inverse delle funzioni goniometriche

$D\,\mathrm{arcsen}\, x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D\arccos x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D\,\mathrm{arctg}\, x=\frac{1}{1+x^2}$ $D\,\mathrm{arctg}\, x=-\frac{1}{1+x^2}$

3.7 Derivate delle funzioni iperboliche

D shx = chx   D chx = shx $Dthx = \frac{1}{ch^2 x}$ $Dcthx = -\frac{1}{sh^2 x}$

3.8 Regole di derivazione

D kf(x) = kf'(x9   D [f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)   D [f(x) · g(x)] = f'(x) · g(x) + g'(x) · f(x)

$$D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2}$$

D f[g(x)] = f'[g(x)] · g'(x)

$$D[f(x)]^{g(x)} = [f(x)]^{g(x)}\left\{g'(x)\log f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}$$

$D\ln|x| = \frac{1}{x}$ $D[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1}\cdot f'(x)$ $Da^{f(x)} = a^{f(x)}\cdot \ln a \cdot f'(x)$ $De^{f(x)} = e^{f(x)}\cdot f'(x)$

$$D\ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

4. STUDIO DI FUNZIONE

Affinché una **funzione** y = f(x) sia **continua** nel punto x = c devono verificarsi contemporaneamente le seguenti condizioni:

1) esistenza del valore della funzione per x = c;
2) esistenza del limite finito l della funzione per x $\rightarrow$ c (cioè $\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = l$);
3) coincidenza tra l e f(c).

Quando anche una sola delle tre condizioni non è verificata si dice che la funzione è **discontinua** e che x = c è un **punto** di **discontinuità** per la funzione (o anche *punto singolare*).

4.1 Punti di discontinuità di prima specie

Si dice che per x=c la funzione y = f(x) ha un punto di **discontinuità** di **prima specie**, quando *esistono* e sono *finiti e diversi tra loro i limiti dalla destra e dalla sinistra* della funzione, a prescindere dall'eventuale valore della f(x) per x = c $\lim_{x\to c^-} f(x) \neq \lim_{x\to c^+} f(x)$

4.2 Punti di discontinuità di seconda specie

Si dice che per x=c la funzione y = f(x) ha un punto di **discontinuità** di **seconda specie**, quando *non esiste*, o *non esiste finito, uno almeno dei due limiti dalla destra o dalla sinistra* di c.

4.3 Punti di discontinuità di terza specie

Si dice che per x=c la funzione y = f(x) ha un punto di **discontinuità** di **terza specie** o **eliminabile**, quando **esiste finito**, il limite per x $\rightarrow$ c di f(x), ma f(c) o non esiste o è diversa dal valore del limite.

4.4 Dominio delle funzione

a) determinare il dominio individuando dove f è continua
b) determinare le eventuali intersezioni del suo grafico con gli assi coordinati
c) studiare il segno della funzione individuando l'insieme di positività e negatività
d) calcolare i limiti della funzione per x $\rightarrow \infty$ e in corrispondenza ai suoi punti di discontinuità, deducendo gli eventuali asintoti orizzontali e verticali
e) tracciare, tenendo conto degli elementi acquisiti, il grafico probabile della funzione.

4.5 Flessi e concavità

Ricerco la 1^a derivata $\neq 0$

$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	$f'''(x_1)$	$f^{iV}(x_1)$ ordine pari	$f^{V}(x_1)$ ord. dispari
=0	>0 min <0 max			
=0	=0	>0 fl. asc. <0 fl. disc.		
=0	=0	=0	>0 min <0 max	
=0	=0	=0	=0	>0 fl. asc. <0 fl. disc.

$f'(x_i) > 0$ ➔ funz.crescente $f''(x_i) > 0$ ➔ concavità verso l'alto

$f'(x_i) < 0$ ➔ funz decrescente $f''(x_i) < 0$ ➔ concavità verso il basso

Per ricercare tutti i flessi anche quelli a tg. obliqua

$f''(x) = 0$ (condizione necessaria ma non sufficiente)

$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	$f'''(x_1)$ ordine dispari	$f^{IV}(x_1)$ ordine pari
$\neq 0$	= 0	$\neq 0$ fl. obliq.	
$\neq 0$	= 0	=0	$\neq 0$ ne min. ne max. ne flessi. la curva volge la concavità verso l'alto > 0 la curva volge la concavità verso il basso < 0

per trovare i flessi si pone f''(x) = 0 , si studia il segno di f''(x) nell'intorno dei valori trovati, se f''(x) cambia segno tra destra e sinistra del punto considerato si ha un flesso altrimenti no.

Se si ha un max o un min a tg orizzontale ➔ $f'(x_0) = 0$

Condizione necessaria, non sufficiente, affinchè vi sia un flesso in x_0 è che $f''(x_0)=0$

Per trovare i flessi perciò si deve porre f''(x)=0

Si studia quindi il segno della f''(x) nell'intorno dei valori trovati

Se f''(x) cambia di segno a destra e a sinistra del punto considerato si ha un flesso altrimenti no.

Se $f'(x_0) > 0$ → funzione crescente in x_0

Se $f'(x_0) < 0$ → funzione decrescente in x_0

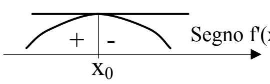
Se $f''(x_0) > 0$ → concavità verso l'alto

Se $f''(x_0) < 0$ → concavità verso il basso

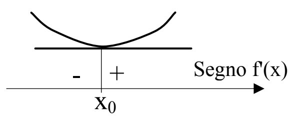
4.6 Massimi e minimi:

se si ha un massimo o minimo relativo a tangente orizzontale → $f'(x_0) = 0$

Massimo relativo



Minimo relativo



5. INTEGRALI INDEFINITI

5.1 Integrali indefiniti

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, \ (n \neq -1)$	$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c, \ (a \neq 0)$
$\int dx = x + c \qquad \int x dx = \frac{1}{2} x^2 + c$	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a}} dx = \sqrt{x^2+a} + c$
$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^2} + c$	$\int \frac{x}{\sqrt{a-x^2}} dx = -\sqrt{a-x^2} + c. \ (a > 0)$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c$	$\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + c$
$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c$	$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + c$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + c$
$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + c \qquad \int \operatorname{sen} ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$	$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x} dx = \ln\left\|tg \frac{x}{2}\right\| + c = \ln\|\cos ecx - ctgx\| + c$
$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + c \qquad \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{sen} ax + c$	$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left\|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + c = \ln\|\sec x + tgx\| + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$	$\int \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x \cos x) + c$
$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -ctgx + c$	$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x \cos x) + c$
$\int tgx dx = -\ln\|\cos x\| + c$	$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2}\left(a^2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right) + c$
$\int \cot g \, x dx = \ln\|\operatorname{sen} x\| + c$	$\int shx dx = chx + c$
$\int e^x dx = e^x + c \qquad \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$	$\int chx dx = shx + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + c$	$\int \frac{1}{ch^2 x} dx = thx + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$	$\int \frac{1}{sh^2 x} dx = -cthx + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} \frac{x}{\|a\|} + c$	

Formula di Archimede per l'area di un segmento parabolico $S = \frac{1}{6}|a|d^3$

5.2 Integrale indefinito

Si definisce **integrale indefinito** di una funzione f(x), e si indica con il simbolo $\int f(x)dx$, ogni espressione F(x)+C con F(x) primitiva di f(x):

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

L'integrale particolare non è che l'integrale generale in cui siano fissate delle costanti.

Si chiama invece **integrale singolare** una soluzione che non può dedursi dall'integrale generale dando particolari valori alle costanti d'integrazione.

5.3 Integrazione per parti

Integrale

$$\int f(x) * d\, g(x) = f(x) \; * \; g(x) - \int g(x) \; * \; d\, f(x)$$

Derivata

$$f(x) \;\rightarrow\; Fattore \;\; Finito$$
$$d\; g(x) = g'(x)\, dx \rightarrow Fattore\ Differenziale$$

Regola d'integrazione per parti: l'integrale del prodotto di un fattore finito $f(x)$ per un fattore differenziale $d\; g(x) = g'(x)\, dx$ è uguale al prodotto del fattore finito per l'integrale $g(x)$ del fattore differenziale, diminuito dell'integrale del prodotto dell'integrale trovato g(x) per il differenziale $f\,'(x)\, dx$ del fattore finito.

5.4 Equazione differenziale del primo ordine

Si dice che **un'equazione differenziale** del primo ordine è a **variabili separabili** se, posto $y' = \frac{dy}{dx}$, essa si può scrivere nella forma: $q(y)\, dy = p(x)\, dx$.

Pertanto l'integrale generale di quest'ultima si ottiene determinando le primitive delle due funzioni q(y) e p(x), cioè calcolandone l'integrale indefinito; si ha così:

$$q(y)\; dy = p(x)\; dx \rightarrow \int q(y)\; dy = \int p(x)\; dx$$

6. FORMULE E RELAZIONI TRIGONOMETRICHE

6.1 Relazioni fondamentali

$sen^2a+cos^2a=1$

$sena=+/-\sqrt{1-\cos^2 a}$

$cosa=+/-\sqrt{1-\text{sen}^2 a}$

6.2 Angoli complementari

sen(90°-a)=cosa

cos(90°-a)=sena

tg(90°-a)=ctga

6.3 Angoli anticomplementari

sen(90°+a)=cosa

cos(90°+a)=-sena

tg(90°+a)=-ctga

6.4 Angoli supplementari

sen(180°-a)=sena

cos(180°-a)=-cosa

tg(180°-a)=-tga

6.5 Angoli antisupplementari

sen(180°+a)=-sena

cos(180°+a)=-cosa

tg(180°+a)=tga

6.6 Angoli opposti

sen(-a)/(360°-a)=-sena

cos(-a)/(360°-a)=cosa

tg(-a)/(360°-a)=-tga

6.7 Formule di addizione

sen(a+b)=senacosb+cosasenb

cos(a+b)=cosacosb-senasenb

tg(a+b)=$\frac{tga+tgb}{1-tgatgb}$

6.8 Formule di sottrazione

sen(a-b)=senacosb-cosasenb

cos(a-b)=cosacosb+senasenb

tg(a-b)=$\frac{tga-tgb}{1+tgatgb}$

6.9 Formule di duplicazione

sen2a=2senacosa

cos2a=cos^2a-sen^2a

tg2a=$\frac{2tga}{1-tg^2a}$

6.10 Formule di bisezione

sen$\frac{a}{2}$ =+/-$\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$

cos$\frac{a}{2}$ =+/-$\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$

tg$\frac{a}{2}$ =+/-$\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$

6.11 Formule di prostaferesi (*a*+*b*=*p*; *a*-*b*=*q*)

senp+senq=2sen $\frac{p+q}{2}$ *cos* $\frac{p-q}{2}$

cosp+cosq=2cos $\frac{p+q}{2}$ *cos* $\frac{p-q}{2}$

senp-senq=2cos $\frac{p+q}{2}$ *sen* $\frac{p-q}{2}$

cosp-cosq=-2sen $\frac{p+q}{2}$ *sen* $\frac{p-q}{2}$

6.12 Formule di Werner

sena senb = $\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$

cosa cosb = $\frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$

sena cosb = $\frac{\mathrm{sen}(a+b)+\mathrm{sen}(a-b)}{2}$

6.13 Espressione in tg($\frac{a}{2}$)

sena = $\frac{2tg\frac{a}{2}}{1+tg^2\frac{a}{2}}$

cosa = $\frac{1-tg^2\frac{a}{2}}{1+tg^2\frac{a}{2}}$

6.14 Relazioni di equivalenza

sena=senb$\Rightarrow \frac{a=b+2k\pi}{a+b=\pi 2k\pi}$

cosa=cosb$\Rightarrow \frac{a=b+2k\pi}{a+b=2k\pi}$

tga=tgb$\Rightarrow a=b+k\pi$

ctga=ctgb$\Rightarrow a=b+k\pi$

6.15 Relazioni elementari

senx=a $\Rightarrow \frac{x = a + 2k\pi}{x_i = (\pi - a) + 2k\pi}$

cosx=a $\Rightarrow x = +/- a + 2k\pi$

tgx=a $\Rightarrow x = a + k\pi$

6.16 Soluzioni di un equazione di secondo grado espressa nella forma *ax²+bx+c = 0*

$$x=\frac{-b+/-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-\frac{b}{2}+/-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}$$

6.17 Relazioni tra gradi e radianti

$$r=\frac{\pi}{180}g$$

$$g=\frac{180}{\pi}r$$

6.18 Seni e Coseni notevoli

	30°	***45°***	***60°***
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. GEOMETRIA ANALITICA

7.1 Distanza tra due punti nel piano cartesiano

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

7.2 Coordinate del punto medio tra due punti

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

7.3 Coordinate del baricentro di un triangolo

$$g_x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$
$$g_y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

7.4 Equazione di una retta passante per due punti

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

7.5 Equazione di una retta passante per un punto, noto il Coef. Ang.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

7.6 Coefficiente angolare di una retta passante per due punti

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

7.7 Distanza di un punto da una retta

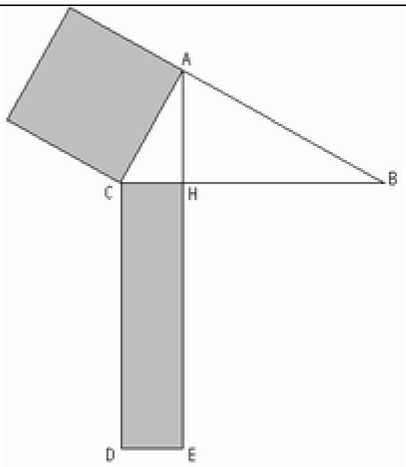
$$d = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

7.8 Angolo individuato da due rette

$$\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

7.9 Teoremi di Euclide

I° Teorema:



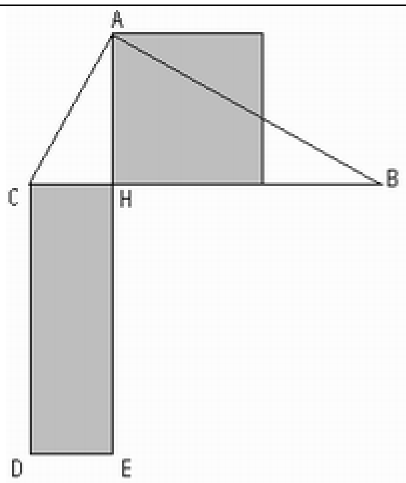
Tesi: $\overline{AC}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{BC}$

Dimostrazione:

$$\overline{BC} : \overline{AC} = \overline{CA} : \overline{HC}$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{CB} \cdot \overline{HC}$$

II° Teorema:



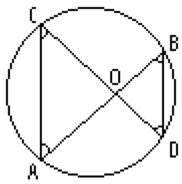
Tesi: $\overline{AH}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{HB}$

Dimostrazione:

$$\overline{BH} : \overline{AH} = \overline{HA} : \overline{HC}$$

$$\overline{AH}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{HB}$$

7.10 Teoremi delle corde e delle secanti

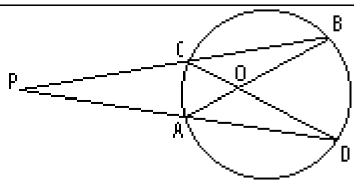


$\hat{A} = \hat{C}$ perché insistono sullo stesso arco

$\hat{D} = \hat{B}$ perché insistono sullo stesso arco

$C\hat{O}A = B\hat{O}D$ perché opposti al vertice

$$\overline{AO} : \overline{OD} = \overline{CO} : \overline{BO}$$



$\hat{A} = \hat{C}$ perché insistono sullo stesso arco

$\hat{D} = \hat{B}$ perché insistono sullo stesso arco

$$\overline{PA} : \overline{PC} = \overline{PD} : \overline{PB}$$

7.11 Formula di Erone

$$A = \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}$$

7.12 Teorema di Carnot

$$a = \sqrt{b + c - 2bc(\cos\alpha)}$$
$$b = \sqrt{a + c - 2ac(\cos\beta)}$$
$$c = \sqrt{a + b - 2ab(\cos\gamma)}$$

7.13 Equazione della circonferenza

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} - r^2 = 0$$

con $-2x_0 = \alpha$ $\;-2y_0 = \beta$ $\;x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} - r^2 = \gamma$

Si ha: $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$

7.14 Centro della circonferenza

$$C\left(-\frac{\alpha}{2}; -\frac{\beta}{2}\right)$$

7.15 Raggio della circonferenza

$$r = \sqrt{\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\beta}{2}\right)^2 - \lambda}$$

$$\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma > 0$$

7.16 Punti di intersezione

X determinare punti intersezione di retta con circonferenza a sistema equazioni date. Sostituendo avrai equazione di secondo grado. Risolvila avrai due valori. Sostituendoli all'equazione della retta si avranno le quattro coordinate.

7.17 Retta tangente ad una circonferenza

1) Scrivi equazione generica retta per P e determini coefficiente angolare ponendo distanza dal centro circonferenza uguale al raggio r. Calcoli retta sapendo coefficiente e punto.

2) Metti a sistema equazione generica a circonferenza. Con sostituzione elimini incognita e ottieni coefficienti con m. Calcolare il □ di □ e trovi coefficienti. Calcoli rette sapendo coefficienti e punto.

7.18 Circonferenza per 3 punti

Esempio
Passa per i punti: A (2;3), B (4;1), C (2;-1)

Equazione generale di una circonferenza:
$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$

Sostituiamo le tre cordinate ai parametri nel eq.:
$A \Rightarrow 4 + 9 + 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0$
$B \Rightarrow 16 + 1 + 4\alpha + \beta + \gamma = 0$
$C \Rightarrow 4 + 1 + 2\alpha - \beta + \gamma = 0$

Ponendo a sistema le tre equazioni avremo:

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + \gamma = -13 \\ 4\alpha + \beta + \gamma = -17 \\ 2\alpha - \beta + \gamma = -5 \end{cases}$$

che risolto permette di calcolare : $\alpha = -4$ $\beta = -2$ $\gamma = 1$

per cui l'equazione diventa:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

8 ALGEBRA

8.1 PRODOTTI NOTEVOLI

Sono moltiplicazioni di polinomi che danno luogo a risultati ottenibili in modo piu` semplice e rapido e facilmente ricordabili.

8.1.1 QUADRATO DELLA SOMMA DI DUE MONOMI

$$(a+b)(a+b) = (a+b)^2$$

$$(a+b)(a+b) = a^2 +ab+ab+b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 +2ab+b^2$$

Il quadrato di un binomio è uguale al quadrato del primo monomio, piu` il quadrato del secondo, piu` il doppio prodotto del primo per il secondo.

ES. $(2x+3y)^2 = (2x)^2 + (3y)^2 + 2(2x)(3y)$

8.1.2 QUADRATO DI UN POLINOMIO

$$(a+b+c)(a+b+c) = (a+b+c)^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 +b^2+c^2+ab+ac+ba+bc+ca+cb$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 +b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

Il quadato di un polinomio di un numero qualunque di termini è uguale alla somma dei quadrati di tutti i termini e dei doppi prodotti di ciascuno di essi per ognuno di quelli che lo seguono.

ES. $(2a-3b+c)^2 = (2a)^2 + (-3b)^2 + c^2 + 2(2a)(-3b) + 2(2a)c + 2(-3b)c = 4a^2 + 9b^2 + c^2 – 12ab + 4ac – 6bc$

8.1.3 PRODOTTO DELLA SOMMA DI DUE MONOMI PER LA LORO DIFFERENZA

$$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza è uguale al quadrato del primo, meno il quadrato del secondo monomio.

ES. $(3a^2 + 5ab)(3a^2 - 5ab) = 9a^4 – 25a^2 b^2$
$(a+b+2c)(a+b-2c) = [(a+b)+2c][(a+b)-2c] = (a+b)^2 – (2c)^2 = a^2 +2ab+b^2 - 4c^2$

8.1.4 CUBO DI UN BINOMIO

$$(a+b)^3 = (a+b)^2 (a+b) = (a^2 +2ab+b^2)(a+b)= a^3 + a^2 b + b^2a + b^3 +2a^2 b + 2b^2a$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3b^2a + b^3$$

Il cubo di un binomio è uguale al cubo del primo monomio che costituisce il binomio, piu` il triplo prodotto del quadrato del primo per il secondo, piu` il triplo prodotto del quadrato del secondo per il primo, piu` il cubo del secondo monomio.

ES. $(2a+ b^2)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2 b^2 + 3(2a)(b^2)^2 + (b^2)^3 = 8a^3 + 12a^2 b^2 + 6ab^4 + b^6$

8.1.5 CUBO DI UN POLINOMIO

$(a+b+c)^3 = (a+b+c)(a+b+c)(a+b+c) = (a+b+c)^2 (a+b+c) = (a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)(a+b+c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2 b + + 3b^2a + 3ac^2 + 3a^2c + 3bc^2 + 3b^2c + 6abc$

Il cubo di un polinomio è dato dal polinomio che ha per termini:

a) i cubi di tutti i termini;
b) i tripli prodotti dei quadrati di ciascuno dei termini per ognuno degli altri;
c) i sestupli dei prodotti dei termini a tre a tre.

8.1.6 POTENZA DI UN BINOMIO

Lo sviluppo di $(a+b)^n$, con n intero positivo, è un polinomio omogeneo, di grado n, ordinato secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b; il coefficiente del primo termine è 1, il coefficiente del secondo termine è l'esponente n, ogni altro coefficiente si ottiene moltiplicando il coefficiente del termine precedente per l' esponente che ha a in questo termine e dividendo il prodotto ottenoto per l' esponente che ha b, nello stesso termine, aumentati di 1.

8.1.7 TRIANGOLO DI TARTAGLIA O DI PASCAL

I coefficienti delle successive potenze del binomio (a+b) si possono trovare in pratica anche col cosiddetto triangolo di Tartaglia:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

La legge di formazione del triangolo è semplice: i numeri di ciascuna riga (tranne il primo e l'ultimo che sono uguali a uno) sono la somma di quelli soprastanti della riga precedente.

8.2 ALGEBRA DEGLI INSIEMI

CONCETTO DI INSIEME: Un'insieme è un gruppo di elementi che soddisfano una determinata proprietà P.

$$A=\{x \mid x \text{ soddisfa } P\} \quad A=\{x \in X \mid p(x)\}$$

OPERAZIONI CON GLI INSIEMI: Dati $A=\{x \mid p(x)\}$ e $B=\{x \mid q(x)\}$

$A \cup B = \{x \mid p(x) \vee q(x)\}$

$A \cap B = \{x \mid p(x) \,\&\, q(x)\}$

$A - B = A \setminus B = \{x \mid p(x) \,\&\, q(x)\}$

$A \subseteq B = \{x \in A \mid x \in B\}$

PROPRIETÀ DEGLI INSIEMI:

a) indempotenza: $A \cup A = A$; $A \cap A = A$

b) commutativa: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

d) associativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

e) distributiva: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

e) assorbimento: $A \cap (A \cup B) = A$; $A \cup (A \cap B) = A$

f) leggi di De Morgan: $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$; $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$

PARTI DEGLI INSIEMI DI A:

P(A)={x | x Í A} insieme delle parti

n.sottoinsiemi di A: $|A| = n$ (per A finito) ottengo che $|P(A)| = 2^n$

PRODOTTO CARTESIANO:

X x Y = {(x, y) | x Î X & y Î Y}

(x, y) vengono chiamate coppie ordinate